Balti Tee 2017

Sorø, 11. november 2017

Version: *Estonian*

Lahendamisaeg: $4\frac{1}{2}$ tundi. Küsimusi võib küsida esimese 30 minuti jooksul.
Kasutada võib ainult joonestus- ja kirjutusvahendeid.

1. Olgu $a_0, a_1, a_2, \ldots$ lõpmatu reaalarvude jada, mis kõigi positiivsete täisarvude n jaoks rahuldab tingimust $\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2} \geq a_n$. Näita, et

$$\frac{a_0 + a_{n+1}}{2} \geq \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$

kehtib kõigi positiivsete täisarvude n jaoks.

2. Kas leidub lõplik reaalarvude hulk, mille puhul nende arvude summa on 2, nende arvude ruutude summa 3, kuupide summa 4, ... ja üheksandate astmete summa 10?

3. Tahvlil on positiivsed mitte tingimata erinevad täisarvud $x_1, \ldots, x_m$. On teada, et iga arv $F_1, \ldots, F_{2018}$ on esitatav ühe või enama tahvlil oleva arvu summana. Mis on m vähim võimalik väärtus?
($F_1, \ldots, F_{2018}$ on siinkohal esimesed 2018 Fibonacci arvu: $F_1 = F_2 = 1$, $F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$ iga $k > 1$ jaoks.)

4. *Lineaarne k muutuja vorm* on avaldis kujul $P(x_1, \ldots, x_k) = a_1 x_1 + \ldots + a_k x_k$, kus $a_1, \ldots, a_k$ on reaalarvulised konstandid. Tõesta, et leiduvad positiivne täisarv n ja lineaarsed 2017 muutuja vormid $P_1, \ldots, P_n$, nii et võrdus

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{2017} = P_1(x_1, \ldots, x_{2017})^{2017} + \ldots + P_n(x_1, \ldots, x_{2017})^{2017}$$

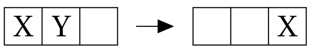
kehtib kõigi reaalarvude $x_1, \ldots, x_{2017}$ korral.

5. Leia kõik funktsioonid $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mille puhul

$$f(x^2 y) = f(xy) + y f(f(x) + y)$$

kehtib kõigi reaalarvude x ja y korral.

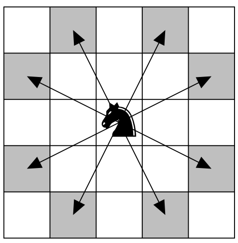
6. Ruudustikku suurusega 4×4 on asetatud viisteist kivi nii, et igas ruudus peale ühe on üks kivi. Iga kahe kõrvutiasetseva (ühise küljega ruudus oleva) kivi puhul võib üks kivi hüpata teisest üle teisel pool asetsevasse ruutu, kui vastav ruut on tühi. Kivi, millest üle hüpati, eemaldatakse mängulaualt.



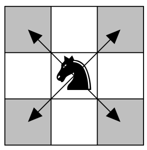
Missugused ruudud võivad olla algseks tühjaks ruuduks, et oleks võimalik eemaldada kõik kivid peale ühe?

7. Kolmekümne tipuga täieliku graafi iga serv on värvitud kas punaseks või siniseks. On lubatud valida servadest moodustunud kolmnurk, mille kõik küljed ei ole ühte värvi, ja muuta kahe serva värve nii, et kolmnurga kõik küljed oleksid sama värvi. Tõesta, et seda operatsiooni korrates on võimalik kogu graaf ühte värvi värvida.
(Täielik graaf on graaf, kus iga kahe tipu vahel on serv.)

8. Maleratsu on vigastanud üht jalga ja lonkab. Ta teeb vaheldumisi tavalisi käike ja lühikesi käike, kus ta liigub diagonaalselt kõrvuti asetsevasse ruutu.



Tavaline käik



Lühike käik

Ratsu liigub malelaual suurusega 5×6 ja alustab tavalise käiguga. Mis on suurim arv käike, mida ta teha saab, kui ta ei tohi külastada ühtegi ruutu (sealhulgas ruutu, kust alustab) rohkem kui ühe korra ja võib vabalt valida ruudu, kust alustab?

9. Kutsume positiivset täisarvu n *taanipäraseks*, kui korrapärast kuusnurka on võimalik jaotada n kongruentseks (võrdseks) hulknurgaks. Tõesta, et leidub lõpmata palju positiivseid täisarve n, mille puhul nii n kui ka $2^n + n$ on taanipärased.

10. Päkapikk ja sabotöör ehitavad müüri. Päkapikul on varu rohelisi kuubikujulisi ehitusklotse ja sabotööril punaseid, kõik ühesuurused. Maapinnale on klotside paigutamiseks joonistatud m ühes reas olevat ruutu. Päkapikk ja sabotöör asetavad kordamööda klotse, kas maapinnale märgitud kohale või mõne juba asetatud klotsi peale, nii et ühegi klotsidest torni kõrgus ei oleks kõrgem kui n klotsi. Päkapikk paneb paika esimese klotsi.

Päkapikk veab kihla, et ta suudab moodustada rohelise rea, s.t. olukorra, kus kõik m ühel kõrgusel olevat klotsi on rohelised. Sabotöör veab kihla, et suudab päkapikku takistada. Leia kõik positiivsete täisarvude paarid (m, n), mille puhul päkapikk suudab kindlustada kihlveo võidu.

11. Olgu H ja I vastavalt teravnurkse kolmnurga ABC kõrguste lõikepunkt ja siseringjoone keskpunkt. Kolmnurga BCI ümberringjoon lõikab lõiku AB punktist B erinevas punktis P. Olgu K punkti H projektsioon sirgele AI ja Q punkti P peegeldus K suhtes. Tõesta, et punktid B, H ja Q asuvad ühel sirgel.

12. Sirge ℓ puutub ringjoont S_1 punktis X ja ringjoont S_2 punktis Y. Sirge m on paralleelne sirgega ℓ ning lõikab ringjoont S_1 punktis P ja ringjoont S_2 punktis Q. Tõesta, et suhe $|XP|/|YQ|$ ei sõltu sirge m valikust.

13. Olgu ABC kolmnurk, milles $\angle ABC = 60°$. Olgu I ja O vastavalt tema siseringjoone ja ümberringjoone keskpunktid. Kolmnurga ABC ümberringjoone kaare BC, mis ei sisalda punkti A, keskpunkt on M. Leia $\angle BAC$, kui on teada, et $|MB| = |OI|$.

14. Olgu P punkt terava nurga $\angle BAC$ sees, kusjuures $\angle ABP = \angle ACP = 90°$. Lõikudel BA ja CA võetakse vastavalt punktid D ja E selliselt, et $|BD| = |BP|$ ja $|CP| = |CE|$. Lõikudel AC ja AB võetakse vastavalt punktid F ja G selliselt, et $DF \perp AB$ ja $EG \perp AC$. Tõesta, et $|PF| = |PG|$.

15. Olgu $n \geq 3$ täisarv. Mis on tasandilise n-nurga suurim võimalik sisenurkade arv, mis on suuremad kui 180 kraadi, kui on teada, et n-nurk ei lõika iseennast ning kõik tema küljed on võrdse pikkusega?

16. Kas iga inimeste grupi jaoks on võimalik valida positiivne täisarv N ning määrata igale inimesele positiivne täisarv nii, et iga kahe inimese jaoks jagub nende inimeste arvude korrutis arvuga N parajasti siis, kui nad on sõbrad?

17. Tee kindlaks, kas võrrandil

$$x^4 + y^3 = z! + 7$$

leidub lõpmata palju lahendeid positiivsetes täisarvudes.

18. Olgu $p > 3$ algarv ja olgu $a_1, a_2, \ldots, a_{\frac{p-1}{2}}$ arvude $1, 2, \ldots, \frac{p-1}{2}$ permutatsioon. Milliste arvude p korral on alati võimalik kindlaks teha järjend $a_1, a_2, \ldots, a_{\frac{p-1}{2}}$, kui kõigi $i, j \in \{1, 2, \ldots, \frac{p-1}{2}\}$ jaoks, kus $i \neq j$, on teada korrutise $a_i a_j$ jääk jagamisel arvuga p?

19. Täisarvu $n \geq 1$ jaoks tähistagu $a(n)$ ülekannete arvu, mida tuleb teha arve 2017 ja $n \cdot 2017$ liites. Esimesed väärtused on $a(1) = 1$, $a(2) = 1$, $a(3) = 0$, nagu näha järgnevast:

001	001	000
2017	4034	6051
+2017	+2017	+2017
=4034	=6051	=8068

Tõesta, et

$$a(1) + a(2) + \ldots + a(10^{2017} - 2) + a(10^{2017} - 1) = 10 \cdot \frac{10^{2017} - 1}{9}.$$

20. Olgu S kõigi selliste järjestatud paaride (a, b) hulk, kus $0 < 2a < 2b < 2017$ on täisarvud ning $a^2 + b^2$ on arvu 2017 kordne. Tõesta, et

$$\sum_{(a,b)\in S} a = \frac{1}{2} \sum_{(a,b)\in S} b.$$