Baltic Way 2017

Version: *Deutsch*

Sorø, 11. November 2017

Bearbeitungszeit: 4,5 Stunden
Fragen können während der ersten 30 Minuten gestellt werden.
Zeichen- und Schreibgeräte sind die einzigen erlaubten Hilfsmittel.

Aufgabe 1. Sei $a_0, a_1, a_2, \ldots$ eine unendliche Folge reeller Zahlen, so dass $\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2} \geq a_n$ für alle positiven ganzen Zahlen n gilt. Man zeige, dass die Ungleichung

$$\frac{a_0+a_{n+1}}{2} \geq \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$$

für alle positiven ganzen Zahlen n erfüllt ist.

Aufgabe 2. Gibt es eine endliche Menge reeller Zahlen, so dass die Summe der Zahlen gleich 2, die Summe ihrer Quadrate gleich 3, die Summe ihrer Kuben gleich 4, ... und die Summe ihrer neunten Potenzen gleich 10 ist?

Aufgabe 3. Auf einer Tafel stehen (nicht notwendigerweise verschiedene) positive ganze Zahlen $x_1, \ldots, x_m$. Es ist bekannt, dass jede der Zahlen $F_1, \ldots, F_{2018}$ die Summe einer oder mehrerer der Zahlen an der Tafel ist. Was ist der kleinstmögliche Wert von m?

($F_1, \ldots, F_{2018}$ sind die ersten 2018 Fibonacci-Zahlen, die durch $F_1 = F_2 = 1$, $F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$ für $k > 1$ definiert sind.)

Aufgabe 4. Eine *Linearform* in k Variablen ist ein Ausdruck der Form $P(x_1, \ldots, x_k) = a_1 x_1 + \ldots + a_k x_k$, wobei $a_1, \ldots, a_k$ reelle Konstanten sind. Man beweise, dass es eine positive ganze Zahl n und Linearformen $P_1, \ldots, P_n$ in 2017 Variablen gibt, so dass die Gleichung

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{2017} = P_1(x_1, \ldots, x_{2017})^{2017} + \ldots + P_n(x_1, \ldots, x_{2017})^{2017}$$

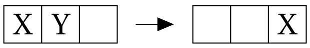
für alle reellen $x_1, \ldots, x_{2017}$ erfüllt ist.

Aufgabe 5. Man bestimme alle Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so dass

$$f(x^2 y) = f(xy) + y f(f(x) + y)$$

für alle reellen x und y gilt.

Aufgabe 6. Auf einem (4×4)-Spielbrett sind 15 Spielsteine auf 15 verschiedenen Feldern platziert. Das 16. Feld ist leer. Befinden sich zwei Steine auf benachbarten Feldern (d.h., Feldern mit einer gemeinsamen Seite), dann kann man mit einem der Steine über den anderen auf dessen gegenüberliegendes Nachbarfeld springen, sofern dieses leer ist. Der übersprungene Stein wird vom Spielbrett genommen.

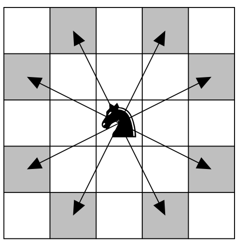


Für welche Anfangspositionen des leeren Feldes ist es möglich, dass sich am Ende nur noch ein Stein auf dem Spielbrett befindet?

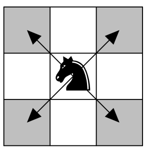
Aufgabe 7. Jede Kante eines vollständigen Graphen auf 30 Knoten ist entweder rot oder blau gefärbt. Haben in einem Dreieck nicht alle Kanten die gleiche Farbe, dann können die beiden gleichfarbigen Kanten umgefärbt werden. Man beweise, dass es möglich ist, den gesamten Graphen durch wiederholtes Anwenden dieser Operation einfarbig zu machen.

(Ein vollständiger Graph ist ein Graph, in dem je zwei Knoten durch eine Kante verbunden sind.)

Aufgabe 8. Ein Springer beim Schach hat ein verletztes Bein und humpelt. Daher macht er abwechselnd einen normalen Springerzug und einen kurzen Zug, bei dem er auf ein diagonal benachbartes Feld zieht.



normaler Zug



kurzer Zug

Der Springer bewegt sich auf einem (5×6)-Brett und beginnt mit einem normalen Zug. Wie viele Züge kann er höchstens machen, wenn er das Ausgangsfeld frei wählen kann und kein Feld (auch nicht das Ausgangsfeld) mehr als einmal betreten darf?

Aufgabe 9. Eine positive ganze Zahl n heißt *dänisch*, falls ein regelmäßiges Sechseck in n kongruente Vielecke zerlegt werden kann. Man zeige, dass für unendlich viele positive ganze Zahlen n sowohl n als auch $2^n + n$ dänisch sind.

Aufgabe 10. Maker und Breaker bauen eine Mauer. Maker benutzt grüne Würfel als Bausteine, Breaker rote, wobei alle Würfel gleich groß sind. Eine Reihe von m Quadraten mit der gleichen Seitenlänge wie die Würfel ist auf den Boden gezeichnet. Nun setzen Maker und Breaker abwechselnd Bausteine auf eines dieser Quadrate oder auf einen bereits platzierten Baustein, wobei nicht mehr als n Bausteine aufeinander gestapelt werden dürfen. Maker beginnt.
Maker wettet, dass er eine grüne Reihe bauen kann, d.h. eine Reihe von m grünen Blöcken in der gleichen Höhe. Breaker wettet, dass er dies verhindern kann. Man bestimme alle Paare (m, n) positiver ganzer Zahlen, für die Maker sicherstellen kann, dass er seine Wette gewinnt.

Aufgabe 11. Seien H der Höhenschnittpunkt und I der Inkreismittelpunkt eines spitzwinkligen Dreiecks ABC. Der Umkreis des Dreiecks BCI schneidet die Strecke AB im Punkt P, der von B verschieden ist. Sei K der Fußpunkt des Lotes von H auf AI und Q der Bildpunkt von P bei Spiegelung an K. Man zeige, dass B, H und Q auf einer Geraden liegen.

Aufgabe 12. Die Gerade ℓ berühre den Kreis S_1 im Punkt X und den Kreis S_2 im Punkt Y. Eine Gerade m ist parallel zu ℓ und schneidet S_1 und S_2 in den Punkten P bzw. Q. Man beweise, dass der Wert von XP/YQ nicht von der Wahl von m abhängt.

Aufgabe 13. Sei ABC ein Dreieck mit $\angle ABC = 60°$, und seien I und O der In- bzw. Umkreismittelpunkt von ABC. Ferner sei M der Mittelpunkt desjenigen Bogens BC auf dem Umkreis von ABC, der A nicht enthält. Man bestimme $\angle BAC$ unter der Voraussetzung $MB = OI$.

Aufgabe 14. Sei P ein Punkt im Inneren eines spitzen Winkels $\angle BAC$ mit $\angle ABP = \angle ACP = 90°$. Die Punkte D und E liegen auf den Strecken BA bzw. CA, so dass $BD = BP$ und $CP = CE$ gilt. Die Punkte F und G liegen auf den Strecken AC bzw. AB, so dass DF senkrecht zu AB und EG senkrecht zu AC ist. Man zeige $PF = PG$.

Aufgabe 15. Sei $n \geq 3$ eine ganze Zahl. Was ist die größtmögliche Anzahl von Innenwinkeln eines ebenen n-Ecks, die größer als 180° sind, wenn sich das n-Eck nicht selbst schneidet und alle seine Seiten gleich lang sind?

Aufgabe 16. Ist es für jede Gruppe von Personen möglich, eine positive ganze Zahl N zu wählen und jedem Gruppenmitglied eine positive ganze Zahl so zuzuordnen, dass das Produkt der Zahlen zweier Personen genau dann durch N teilbar ist, wenn diese miteinander befreundet sind?

Aufgabe 17. Man entscheide, ob die Gleichung

$$x^4 + y^3 = z! + 7$$

unendlich viele Lösungen in positiven ganzen Zahlen besitzt.

Aufgabe 18. Sei $p > 3$ eine Primzahl, und sei $a_1, a_2, \ldots, a_{\frac{p-1}{2}}$ eine Permutation von $1, 2, \ldots, \frac{p-1}{2}$. Für welche Werte von p ist es stets möglich, die Werte von $a_1, a_2, \ldots, a_{\frac{p-1}{2}}$ zu bestimmen, wenn für alle $i, j \in \{1, 2, \ldots, \frac{p-1}{2}\}$ mit $i \neq j$ der Rest von $a_i a_j$ beim Teilen durch p bekannt ist?

Aufgabe 19. Für ganzzahliges $n \geq 1$ bezeichne $a(n)$ die Anzahl der Überträge beim Addieren von 2017 und $n \cdot 2017$. Zum Beispiel gilt $a(1) = 1$, $a(2) = 1$, $a(3) = 0$, wie im Folgenden illustriert.

001	001	000
2017	4034	6051
+2017	+2017	+2017
=4034	=6051	=8068

Man beweise

$$a(1) + a(2) + \ldots + a(10^{2017} - 2) + a(10^{2017} - 1) = 10 \cdot \frac{10^{2017} - 1}{9}.$$

Aufgabe 20. Sei S die Menge aller geordneten Paare (a, b) ganzer Zahlen mit $0 < 2a < 2b < 2017$, für die $a^2 + b^2$ ein Vielfaches von 2017 ist. Man beweise

$$\sum_{(a,b)\in S} a = \frac{1}{2} \sum_{(a,b)\in S} b .$$