Baltic Way 2017

Version: *Icelandic*

Sorø, 11. nóvember 2017

Tímamörk: $4\frac{1}{2}$ klst.
Spurningar eru leyfðar fyrstu 30 mínúturnar.
Einungis teikniáhöld og skriffæri eru leyfð.

Dæmi 1. Látum $a_0, a_1, a_2, \ldots$ vera óendanlega runu rauntalna sem uppfylla $\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2} \geq a_n$ fyrir allar jákvæðar heiltölur n. Sýnið að

$$\frac{a_0 + a_{n+1}}{2} \geq \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$

gildi fyrir allar jákvæðar heiltölur n.

Dæmi 2. Er til endanlegt mengi rauntalna þannig að summa stakanna sé jöfn 2, summa annarra velda þeirra sé jöfn 3, summa þriðju velda þeirra sé jöfn 4, ... og summa níundu velda þeirra sé jöfn 10?

Dæmi 3. Jákvæðar heiltölur $x_1, \ldots, x_m$ (ekki nauðsynlega ólíkar) eru ritaðar á töflu. Sérhverja talnanna $F_1, \ldots, F_{2018}$ má rita sem summu einnar eða fleiri talna á töflunni. Hvert er minnsta mögulega gildi tölunnar m?

(Hér eru $F_1, \ldots, F_{2018}$ fyrstu 2018 Fibonacci tölurnar: $F_1 = F_2 = 1$, $F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$ fyrir $k > 1$.)

Dæmi 4. *Línulegt form* í k breytum er stæða á forminu $P(x_1, \ldots, x_k) = a_1 x_1 + \ldots + a_k x_k$ með rauntölufincluding föstum $a_1, \ldots, a_k$. Sýnið að til séu jákvæð heiltala n og línuleg form $P_1, \ldots, P_n$ í 2017 breytum þannig að jafnan

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{2017} = P_1(x_1, \ldots, x_{2017})^{2017} + \ldots + P_n(x_1, \ldots, x_{2017})^{2017}$$

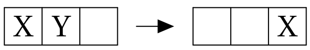
gildi fyrir allar rauntölur $x_1, \ldots, x_{2017}$.

Dæmi 5. Finnið öll föll $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ þannig að

$$f(x^2 y) = f(xy) + y f(f(x) + y)$$

fyrir allar rauntölur x og y.

Dæmi 6. Fimmtán steinar eru lagðir á 4×4 reita borð, einn á hvern reit og eftir verður einn auður reitur. Þegar tveir steinar liggja á grannreitum (með sameiginlega hlið) má annar þeirra stökkva yfir hinn sé reiturinn handan hans auður. Steinninn sem stokkið er yfir er fjarlægður af borðinu.

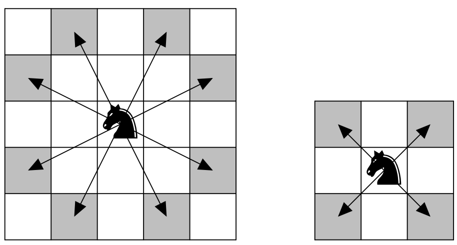


Fyrir hvaða upphafsstöðu tóma reitsins er mögulegt að enda með nákvæmlega einn stein á borðinu?

Dæmi 7. Sérhver leggur fulltengds nets á 30 hnútum er litaður annað hvort rauður eða blár. Leyfilegt er að velja tvílitan þríhyrning og breyta lit þeirra tveggja leggja sem eru samlitir þannig að úr verði einlitur þríhyrningur. Sýnið að með því að beita þessari aðgerð síendurtekið megi að endingu gera allt netið einlitt.

(Fulltengt net er net þar sem sérhverjir tveir hnútar eru tengdir með legg.)

Dæmi 8. Riddari haltrar vegna meiðsla á fæti. Hann skiptist á um að hreyfa sig með hefðbundnum hætti og hreyfa sig stutt, þ.e. taka eitt skref á ská í aðliggjandi reit.



Hefðbundin hreyfing — Stutt hreyfing

Halti riddarinn ferðast um á 5×6 reita taflborði og byrjar á hefðbundinni hreyfingu. Hver er mesti mögulegi fjöldi hreyfinga sem hann getur framkvæmt ef hann byrjar á reit að eigin vali og má ekki fara tvisvar á sama reit (að upphafsreit meðtöldum)?

Dæmi 9. Jákvæð heiltala n er sögð *dönsk* ef skipta má reglulegum sexhyrningi í n eins marghyrninga. Sýnið að til séu óendanlega margar jákvæðar heiltölur n þannig að bæði n og $2^n + n$ séu danskar.

Dæmi 10. Völundur og Níðuður reisa vegg. Völundur á gnægð grænna teningslaga kubba og Níðuður á gnótt rauðra slíkra. Allir eru kubbarnir sömu stærðar. Mörkuð hefur verið röð m ferninga af sömu hliðarlengd og kubbarnir á jörðina. Völundur og Níðuður skiptast á að leggja kubb annað hvort beint á einn ferninganna eða ofan á kubb sem fyrir er, þó þannig að hver kubbaturn rísi aldrei hærra en n kubba til himins. Völundur leggur fyrsta kubbinn.

Völundur veðjar um að hann geti lagt græna línu í vegginn, þ.e. m græna kubba í röð í sömu hæð. Níðuður veðjar að hann geti komið í veg fyrir þessi áform hans. Ákvarðið allar tvenndir (m,n) jákvæðra heiltalna þannig að Völundur geti tryggt að hann vinni veðmálið.

Dæmi 11. Látum H og I vera hæðamiðju og innmiðju hvasshyrnds þríhyrnings ABC. Umritaður hringur þríhyrningsins BCI sker strikið AB í punktinum P sem er ólíkur B. Látum K vera ofanvarp H á AI og Q vera speglun P um K. Sýnið að B, H og Q liggi á sömu línu.

Dæmi 12. Lína ℓ snertir hring S_1 í punkti X og hring S_2 í punkti Y. Við teiknum línu m sem er samsíða ℓ og sker S_1 í punkti P og S_2 í punkti Q. Sýnið að hlutfallið $|XP|/|YQ|$ sé óháð vali á m.

Dæmi 13. Látum ABC vera þríhyrning með $\angle ABC = 60°$. Látum I og O vera innmiðju og ummiðju ABC. Látum M vera miðpunkt þess boga BC á umrituðum hring ABC sem inniheldur ekki punktinn A. Ákvarðið $\angle BAC$ ef gefið er að $|MB| = |OI|$.

Dæmi 14. Látum P vera punkt sem liggur innan hvassa hornsins $\angle BAC$. Gerum ráð fyrir að $\angle ABP = \angle ACP = 90°$. Punktarnir D og E liggja á strikunum BA og CA þannig að $|BD| = |BP|$ og $|CP| = |CE|$. Punktar F og G liggja á strikunum AC og AB þannig að DF er hornrétt á AB og EG er hornrétt á AC. Sýnið að $|PF| = |PG|$.

Dæmi 15. Látum $n \geq 3$ vera heiltölu. Hver er mesti mögulegi fjöldi horna (innanverðra) sem eru stærri en 180° í n-hyrningi í planinu, þegar gefið er að n-hyrningurinn er ekki sjálfskerandi og allar hliðar hans eru af sömu lengd?

Dæmi 16. Getur hvaða hópur fólks sem er valið jákvæða heiltölu N og úthlutað sérhverjum einstaklingi í hópnum jákvæðri heiltölu þannig að margfeldi talna tveggja einstaklinga úr hópnum sé deilanleg með N þá og því aðeins að þeir séu vinir?

Dæmi 17. Ákvarðið hvort jafnan

$$x^4 + y^3 = z! + 7$$

hafi óendanlegan fjölda jákvæðra heiltölulausna.

Dæmi 18. Látum $p > 3$ vera frumtölu og látum $a_1, a_2, \ldots, a_{\frac{p-1}{2}}$ vera umröðun talnanna $1, 2, \ldots, \frac{p-1}{2}$. Fyrir hvaða p er ávallt mögulegt að ákvarða rununa $a_1, a_2, \ldots, a_{\frac{p-1}{2}}$ ef um öll $i, j \in \{1, 2, \ldots, \frac{p-1}{2}\}$ með $i \neq j$ gildir að leifin $a_i a_j$ mátuð við p sé þekkt?

Dæmi 19. Fyrir heiltölu $n \geq 1$ látum við $a(n)$ tákna hversu oft þarf að geyma tölustaf þegar 2017 er lagt við $n \cdot 2017$. Fyrstu gildin eru $a(1) = 1$, $a(2) = 1$, $a(3) = 0$, sem sjá má af:

001	001	000
2017	4034	6051
+2017	+2017	+2017
=4034	=6051	=8068

Sýnið að

$$a(1) + a(2) + \ldots + a(10^{2017} - 2) + a(10^{2017} - 1) = 10 \cdot \frac{10^{2017} - 1}{9}.$$

Dæmi 20. Látum S vera mengi allra heiltölutvennda (a,b) með $0 < 2a < 2b < 2017$ þannig að $a^2 + b^2$ sé margfeldi af 2017. Sýnið að

$$\sum_{(a,b)\in S} a = \frac{1}{2} \sum_{(a,b)\in S} b .$$