Baltijas ceļš 2017

Versija: *Latviešu*

Sorē, 2017. gada 11. novembris

Risināšanas laiks: 4,5 stundas.
Jautājumus var uzdot pirmo 30 minūšu laikā.
Atļauts izmantot tikai rakstāmpiederumus, lineālu un cirkuli.

1. uzdevums. Bezgalīgai reālu skaitļu virknei $a_0, a_1, a_2, \ldots$ visiem naturāliem n izpildās sakarība $\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2} \geq a_n$. Pierādīt, ka visiem naturāliem n izpildās

$$\frac{a_0+a_{n+1}}{2} \geq \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}.$$

2. uzdevums. Vai eksistē tāda galīga reālu skaitļu kopa, ka to summa ir vienāda ar 2, to kvadrātu summa ir vienāda ar 3, to kubu summa ir vienāda ar 4, ..., un to devīto pakāpju summa ir vienāda ar 10?

3. uzdevums. Uz tāfeles ir uzrakstīti (ne noteikti dažādi) naturāli skaitļi x_1, ..., x_m. Zināms, ka jebkuru no skaitļiem F_1, ..., F_{2018} var izteikt kā dažu (viena vai vairāku) uz tāfeles uzrakstīto skaitļu summu. Kāda ir mazākā iespējamā m vērtība?

(Šeit F_1, ..., F_{2018} ir 2018 pirmie Fibonači skaitļi: $F_1 = F_2 = 1$ un $F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$ visiem $k > 1$.)

4. uzdevums. Par *lineāru formu* no k mainīgajiem sauc izteiksmi $P(x_1, \ldots, x_k) = a_1 x_1 + \ldots + a_k x_k$, kur $a_1, \ldots, a_k$ ir reāli koeficienti. Pierādīt, ka eksistē naturāls skaitlis n un tādas lineāras formas $P_1, \ldots, P_n$ no 2017 mainīgajiem, ka vienādība

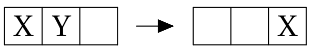
$$x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{2017} = P_1(x_1, \ldots, x_{2017})^{2017} + \ldots + P_n(x_1, \ldots, x_{2017})^{2017}$$

ir spēkā visiem reāliem $x_1, \ldots, x_{2017}$.

5. uzdevums. Atrodiet visas funkcijas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kurām visiem reāliem x un y izpildās

$$f(x^2 y) = f(xy) + y f(f(x) + y).$$

6. uzdevums. Uz 4×4 laukuma ir novietoti piecpadsmit akmentiņi — pa vienam akmentiņam katrā laucinā, viens lauciņš ir tukšs. Ja divi akmentiņi atrodas blakus lauciņos (ar kopīgu malu), tad viens no tiem var pārlēkt pāri otram uz tam pretējā pusē esošo lauciņu, ja tas ir tukšs. Akmentiņš, kuram pārlec pāri, tiek noņemts no laukuma.

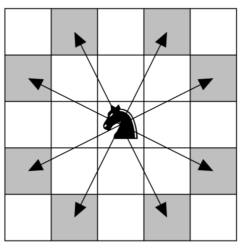


No kurām sākotnējām tukšā lauciņa pozīcijām iespējams sasniegt situāciju, kad uz laukuma ir palicis tikai viens akmentiņš?

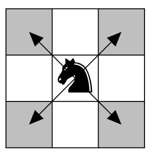
7. uzdevums. Dots pilns grafs ar 30 virsotnēm, katra no tā šķautnēm ir nokrāsota zilā vai sarkanā krāsā. Vienā gājienā atļauts izvēlēties trijstūri, kura visas malas nav vienā krāsā, un pārkrāsot tās divas malas, kuras ir vienā krāsā, trešās malas krāsā. Pierādīt, ka, atkārtojot šo darbību, visu grafu var pārkrāsot vienā krāsā.

(Par pilnu grafu sauc grafu, kurā katras divas virsotnes ir savienotas ar šķautni.)

8. uzdevums. Šaha zirdziņš ir sasitis kāju un klibo; tas pamīšus izdara normālus gājienus un īsus gājienus, pārejot uz kādu rūtiņu, kura atrodas blakus pa diagonāli.



Normāls gājiens



Īss gājiens

Šādā veidā klibais zirdziņš staigā pa 5×6 lauciņu laukumu. Kādu lielāko gājienu skaitu tas var izdarīt, ja katru lauciņu tas var apmeklēt ne vairāk kā vienreiz (sākotnējais lauciņš jau skaitās apmeklēts)?

9. uzdevums. Naturālu skaitli n sauc par *dānisku*, ja regulāru sešstūri var sagriezt n vienādos daudzstūros. Pierādīt, ka ir bezgalīgi daudz tādu dānisku skaitļu n, ka arī $2^n + n$ ir dānisks skaitlis.

10. uzdevums. Maija un Paija būvē sienu no vienādiem kubiskiem blokiem, Maija liek zaļus blokus, bet Paija — sarkanus.

Sākumā uz grīdas vienā rindā ir uzzīmēti m kvadrāti. Maija sāk pirmā, un viņas pamīšus liek pa vienam blokam vai nu uz kāda no uzzīmētajiem kvadrātiem, vai arī uz kāda jau iepriekš uzlikta bloka tā, lai nevienas kolonnas augstums nepārsniegtu n blokus.

Nosakiet kādiem naturālu skaitļu pāriem (m,n) Maija noteikti var iegūt zaļu bloku rindu, t.i., rindu vienādā augstumā, kurā visi m bloki ir zaļi, neatkarīgi no tā, kā savus blokus liek Paija.

11. uzdevums. Šaurleņķa trijstūra ABC ievilktās riņķa līnijas centrs ir I, bet tā augstumu krustpunkts ir H. Trijstūrim BCI apvilktā riņķa līnija krusto malu AB punktā P (kas nesakrīt ar B). Perpendikula, kas no H vilkts pret AI, pamats ir K, savukārt Q ir punkta P simetriskais punkts attiecībā pret K. Pierādīt, ka punkti B, H un Q atrodas uz vienas taisnes.

12. uzdevums. Taisne ℓ pieskaras riņķa līnijai S_1 punktā X un riņķa līnijai S_2 punktā Y. Mēs novelkam taisni m, kas ir paralēla ℓ un krusto S_1 punktā P, bet S_2 punktā Q. Pierādīt, ka attiecība XP/YQ nav atkarīga no taisnes m izvēles.

13. uzdevums. Trijstūra ABC ievilktās un apvilktās riņķa līniju centri ir attiecīgi I un O, tam apvilktās riņķa līnijas loka BC, kas nesatur A, viduspunkts ir M. Atrodiet leņķa $\sphericalangle BAC$ vērtību, ja zināms, ka $MB = OI$ un $\sphericalangle ABC = 60°$.

14. uzdevums. Šaurā leņķa $\sphericalangle BAC$ iekšpusē atzīmēts punkts P, zināms, ka $\sphericalangle ABP = \sphericalangle ACP = 90°$. Uz nogriežņiem BA un CA atlikti attiecīgi punkti D un E tā, ka $BD = BP$ un $CP = CE$. Punkti F un G atrodas attiecīgi uz nogriežņiem AC un AB tā, ka $DF \perp AB$ un $EG \perp AC$. Pierādīt, ka $PF = PG$.

15. uzdevums. Dots naturāls skaitlis $n \geq 3$. Kāds lielākais skaits par 180° lielāku iekšējo leņķu var būt n-stūrim (plaknē), kura visas malas ir vienādas? (Daudzstūra malas savā starpā nekrustojas.)

16. uzdevums. Vai jebkurai cilvēku grupai var izvēlēties naturālu skaitli N un katram grupas dalībniekam piešķirt naturālu skaitli tā, lai jebkuru divu dalībnieku skaitļu reizinājums dalītos ar N tad un tikai tad, ja viņi ir draugi?

17. uzdevums. Noskaidrojiet, vai vienādojumam

$$x^4 + y^3 = z! + 7$$

ir bezgalīgi daudz atrisinājumu naturālos skaitļos!

18. uzdevums. Dots pirmskaitlis $p > 3$. Pieņemsim, ka $a_1, a_2, \ldots, a_{\frac{p-1}{2}}$ ir kaut kāda skaitļu $1, 2, \ldots, \frac{p-1}{2}$ permutācija. Kuriem p šo virkni $a_1, a_2, \ldots, a_{\frac{p-1}{2}}$ vienmēr iespējams noskaidrot, ja ir zināms skaitļa $a_i a_j$ atlikums, dalot ar p, visiem $i, j \in \{1, 2, \ldots, \frac{p-1}{2}\}$, $i \neq j$?

19. uzdevums. Naturālam skaitlim n ar $a(n)$ apzīmēsim kopējo pārnesumu skaitu, kas rodas, saskaitot 2017 ar $n \cdot 2017$. Trīs pirmās $a(n)$ vērtības ir $a(1) = 1$, $a(2) = 1$, $a(3) = 0$, ko var redzēt no sekojošām izteiksmēm:

001	001	000
2017	4034	6051
+2017	+2017	+2017
=4034	=6051	=8068

Pierādīt, ka

$$a(1) + a(2) + \ldots + a(10^{2017} - 2) + a(10^{2017} - 1) = 10 \cdot \frac{10^{2017} - 1}{9}.$$

20. uzdevums. Ar S apzīmēsim visu sakārtotu veselu skaitļu pāru (a,b) kopu, kuriem $0 < 2a < 2b < 2017$ un $a^2 + b^2$ ir skaitļa 2017 daudzkārtnis. Pierādīt, ka

$$\sum_{(a,b)\in S} a = \frac{1}{2} \sum_{(a,b)\in S} b \, .$$