Baltijos kelias 2017

Version: *Lithuanian*

Sorė, 2017 m. lapkričio 11 d.

Laikas sprendimui: 4 val. 30 min. Klausimus galima užduoti per pirmąsias 30 minučių.
Leidžiama naudotis tik rašymo ir braižymo priemonėmis.

1 uždavinys. Realiųjų skaičių begalinė seka $a_0, a_1, a_2, \ldots$ tenkina sąlygą: $\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2} \geq a_n$ visiems natūraliesiems n. Įrodykite, kad visiems natūraliesiems n galioja nelygybė

$$\frac{a_0 + a_{n+1}}{2} \geq \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}.$$

2 uždavinys. Ar egzistuoja baigtinė realiųjų skaičių aibė, kurios elementų suma lygi 2, elementų kvadratų suma lygi 3, elementų kubų suma lygi 4, ..., elementų devintųjų laipsnių suma lygi 10?

3 uždavinys. Lentoje užrašyti natūralieji skaičiai $x_1, \ldots, x_m$ (nebūtinai skirtingi). Kiekvienas iš skaičių $F_1, \ldots, F_{2018}$ yra vieno ar daugiau užrašytųjų skaičių suma. Kokia yra mažiausia galima skaičiaus m reikšmė?
(Čia $F_1, \ldots, F_{2018}$ yra pirmieji 2018 Fibonačio sekos skaičių: $F_1 = F_2 = 1$; $F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$, kai $k > 1$.)

4 uždavinys. Reiškinys $P(x_1, \ldots, x_k) = a_1 x_1 + \ldots + a_k x_k$, kur $a_1, \ldots, a_k$ yra duotos realiosios konstantos, vadinamas k kintamųjų *tiesine forma*. Įrodykite, kad egzisuoja tokie natūralusis skaičius n ir 2017-os kintamųjų tiesinės formos $P_1, \ldots, P_n$, kad lygybė

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{2017} = P_1(x_1, \ldots, x_{2017})^{2017} + \ldots + P_n(x_1, \ldots, x_{2017})^{2017}$$

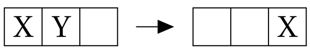
galioja su visais realiaisiais skaičiais $x_1, \ldots, x_{2017}$.

5 uždavinys. Raskite visas funkcijas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kurioms lygybė

$$f(x^2 y) = f(xy) + y f(f(x) + y)$$

galioja su visais realiaisiais skaičiais x ir y.

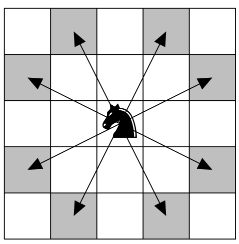
6 uždavinys. Į 4×4 lentos 15 langelių padėta po šaškę, o vienas langelis paliktas tuščias. Jei dvi šaškės yra gretimuose (bendrą kraštinę turinčiuose) langeliuose, tai viena iš dviejų šaškių gali peršokti per kitą į priešingą gretimą langelį, jei tik jis tuščias, o šaškė, per kurią peršokama, tada nuimama (žr. pav.).



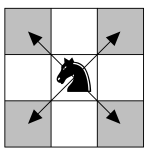
Atliekant ėjimus, ant lentos palikta vienintelė šaškė. Nustatykite galimas pradinio tuščio langelio padėtis.

7 uždavinys. Pilnojo grafo, turinčio 30 viršūnių, kiekviena briauna nudažyta arba raudonai, arba mėlynai. Ėjimo metu leidžiama pasirinkti bet kurį trikampį su skirtingų spalvų kraštinėmis ir perdažyti jo dvi tos pačios spalvos kraštines, kad visas trikampis taptų vienspalvis. Įrodykite, kad atliekant ėjimus visą grafą galima padaryti vienspalvį.
(Grafas vadinamas pilnuoju, jei kiekvienas dvi jo viršūnes jungia viena briauna.)

8 uždavinys. Šachmatų žirgas yra raišas, todėl po kiekvieno savo įprasto ėjimo atlieka trumpą ėjimą, kurio metu peršoka į gretimą langelį, esantį toje pačioje įstrižainėje (žr. pav.), o po kiekvieno trumpo – vėl įprastą.



Įprastas ėjimas



Trumpas ėjimas

Raišasis žirgas juda 5×6 languota lenta, jo pirmasis ėjimas įprastas. Kiek daugiausiai ėjimų gali atlikti žirgas, jei gali pasirinkti savo pradinį langelį ir jokiame langelyje (įskaitant pradinį) jis negali būti daugiau nei vieną sykį?

9 uždavinys. Natūralųjį skaičių n vadinsime *soriškuoju*, jei taisyklingąjį šešiakampį įmanoma padalyti į n lygių daugiakampių. Įrodykite, kad yra be galo daug natūraliųjų skaičių n, kuriems skaičiai n ir $2^n + n$ abu yra soriškieji.

10 uždavinys. Konstrulis ir Destrulis stato sieną. Konstrulis turi žalių kubinių plytų atsargas, o Destrulis – raudonų; visos jųdviejų plytos yra to paties dydžio. Ant žemės kreida nubrėžta m kvadratų, esančių vienoje eilėje bei žyminčių plytų vietą. Konstrulis ir Destrulis pakaitomis atlieka ėjimus, kiekvieno ėjimo metu padėdami po vieną savo plytą arba tiesiai ant nubrėžto kvadrato, arba ant kitos jau padėtos plytos; viena ant kitos sudėtų plytų bokšte negali būti daugiau nei n plytų. Pirmąją plytą deda Konstrulis.

Konstrulis susilažino, kad jam pavyks gauti žalių plytų sluoksnį sienoje, t. y. pasiekti, kad visos m plytų tam tikrame aukštyje būtų žalios. Destrulis tikisi sutrukdyti Konstruliui. Nustatykite visas natūraliųjų skaičių poras (m, n), kurioms Konstrulis gali užsitikrinti pergalę lažybose.

11 uždavinys. Smailiojo trikampio ABC aukštinių ir pusiaukampinių sankirtos taškai atitinkamai pažymėti H ir I. Trikampio BCI apibrėžtinis apskritimas kerta atkarpą AB taške $P \neq B$. Taškas K yra statmens, išvesto iš H į tiesę AI, pagrindas; taškas Q yra simetriškas taškui P taško K atžvilgiu. Įrodykite, kad taškai B, H ir Q yra vienoje tiesėje.

12 uždavinys. Tiesė ℓ liečia apskritimą S_1 taške X, o apskritimą S_2 – taške Y. Nagrinėkime tiesę m, lygiagrečią su ℓ, ir tarkime, kad ji kerta S_1 taške P ir kerta S_2 taške Q. Įrodykite, kad santykio XP/YQ reikšmė nepriklauso nuo tiesės m parinkimo.

13 uždavinys. Duotas trikampis ABC, kuriame $\angle ABC = 60°$. Trikampio ABC įbrėžtinio ir apibrėžtinio apskritimų centrai atitinkamai pažymėti I ir O. Taškas M trikampio ABC apibrėžtinio apskritimo lanką BC, kuriam nepriklauso taškas A, dalija pusiau. Nustatykite $\angle BAC$, jei $MB = OI$.

14 uždavinys. Smailiojo kampo BAC viduje pažymėtas toks taškas P, kad $\angle ABP = \angle ACP = 90°$. Atkarpose BA ir CA atitinkamai pažymėti tokie taškai D ir E, kad $BD = BP$ ir $CP = CE$. Atkarpose AC ir AB atitinkamai pažymėti tokie taškai F ir G, kad tiesės DF ir AB yra statmenos bei tiesės EG ir AC yra statmenos. Įrodykite, kad $PF = PG$.

15 uždavinys. Duotas natūralusis skaičius $n \geq 3$. Kiek daugiausiai vidinių kampų, didesnių nei 180°, gali turėti n-kampis (esantis plokštumoje), kuris nekerta savęs ir kurio visos kraštinės lygios?

16 uždavinys. Ar bet kokiai žmonių grupei galima taip parinkti natūralųjį skaičių N ir kiekvienam grupės žmogui priskirti po natūralųjį skaičių, kad grupėje bet kurių dviejų žmonių skaičių sandauga dalytųsi iš N tada ir tik tada, kai jie yra draugai?

17 uždavinys. Nustatykite, ar lygties

$$x^4 + y^3 = z! + 7$$

natūraliųjų sprendinių skaičius yra begalinis.

18 uždavinys. Skaičius $p > 3$ yra pirminis. Skaičius $1, 2, \ldots, \frac{p-1}{2}$ surašant tam tikra tvarka, gaunamas jų kėlinys $a_1, a_2, \ldots, a_{\frac{p-1}{2}}$. Kurioms p reikšmėms visada įmanoma atkurti seką $a_1, a_2, \ldots, a_{\frac{p-1}{2}}$, jei tik visiems $i, j \in \{1, 2, \ldots, \frac{p-1}{2}\}$, kuriems $i \neq j$, žinoma skaičiaus $a_i a_j$ liekana moduliu p?

19 uždavinys. Kiekvienam natūraliajam n skaičius $a(n)$ parodo, kiek kartų skaitmenį reikia palikti mintyse ir pridėti kitoje skiltyje, stulpeliu sudedant skačius 2017 ir $n \cdot 2017$. Pavyzdžiui, $a(1) = 1$, $a(2) = 1$, $a(3) = 0$, nes:

001	001	000
2017	4034	6051
+2017	+2017	+2017
=4034	=6051	=8068

Įrodykite, kad

$$a(1) + a(2) + \ldots + a(10^{2017} - 2) + a(10^{2017} - 1) = 10 \cdot \frac{10^{2017} - 1}{9}.$$

20 uždavinys. Aibę S sudaro visos sutvarkytos natūraliųjų skaičių poros (a, b), kurioms $2a < 2b < 2017$ ir kurioms $a^2 + b^2$ dalijasi iš 2017. Įrodykite, kad

$$\sum_{(a,b)\in S} a = \frac{1}{2} \sum_{(a,b)\in S} b .$$