Baltic Way 2017

Version: *Norwegian*

Sorø, 11. november 2017

Tid til rådighet: $4\frac{1}{2}$ timer.
Spørsmål kan stilles de første 30 minuttene.
Kun tegne- og skriveredskaper er tillatt.

Oppgave 1. La $a_0, a_1, a_2, \ldots$ være en uendelig følge av reelle tall slik at $\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2} \geq a_n$ for alle positive heltall n. Vis at

$$\frac{a_0 + a_{n+1}}{2} \geq \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$

for alle positive heltall n.

Oppgave 2. Finnes det en endelig mengde av reelle tall slik at summen av dem er 2, summen av kvadratene er 3, summen av tredjepotensene er 4, ..., og summen av niendepotensene er 10?

Oppgave 3. Positive heltall $x_1, \ldots, x_m$ (ikke nødvendigvis forskjellige) er skrevet på en tavle. Det er kjent at hvert tall $F_1, \ldots, F_{2018}$ kan skrives som en sum av ett eller flere av tallene på tavlen. Hva er den minste mulige verdien av m?

(Her er $F_1, \ldots, F_{2018}$ de 2018 første Fibonacci-tallene: $F_1 = F_2 = 1$, $F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$ for $k > 1$.)

Oppgave 4. En *lineær form* i k variabler er et uttrykk på formen $P(x_1, \ldots, x_k) = a_1x_1 + \ldots + a_kx_k$ med reelle konstanter $a_1, \ldots, a_k$. Vis at det finnes et positivt heltall n og lineære former $P_1, \ldots, P_n$ i 2017 variabler slik at ligningen

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{2017} = P_1(x_1, \ldots, x_{2017})^{2017} + \ldots + P_n(x_1, \ldots, x_{2017})^{2017}$$

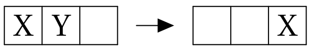
holder for alle reelle tall $x_1, \ldots, x_{2017}$.

Oppgave 5. Finn alle funksjoner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ slik at

$$f(x^2y) = f(xy) + yf(f(x) + y)$$

for alle reelle tall x og y.

Oppgave 6. Femten steiner er plassert på et 4×4-brett, en i hver rute, der den gjenværende ruten er tom. Når to steiner er på naboruter (ruter som har en felles side) kan en stein hoppe over den andre til den motsatte naboruten, gitt at denne er tom. Steinen som hoppes over fjernes fra brettet.

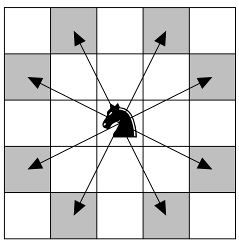


På hvilke steder kan den opprinnelige tomme ruten være for at det skal være mulig å ende opp med bare én stein på brettet?

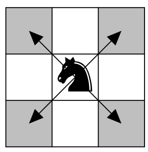
Oppgave 7. Hver kant i en komplett graf med 30 hjørner er farget enten rød eller blå. Det er tillatt å velge en ikke-ensfarget trekant og endre fargen på de to kantene som har felles farge, og med dette gjøre trekanten ensfarget. Vis at man ved å gjenta denne operasjonen kan gjøre hele grafen ensfarget.

(En komplett graf er en graf der hvert par av hjørner er forbudet med en kant.)

Oppgave 8. En sjakk-springer har skadet det ene benet sitt og begynt å halte. Han alternerer mellom å gjøre et normalt springer-hopp og et kort hopp til et felt som er nabo på en diagonal.



Normalt hopp



Kort hopp

Den haltende springeren hopper på et sjakkbrett med 5×6 felter, og han starter med et normalt hopp. Hva er det høyeste antallet ganger han kan hoppe hvis han får starte på et felt han kan velge selv, men ikke får lov til å hoppe til et felt han har vært på før (inkludert startfeltet)?

Oppgave 9. Et positivt heltall n er *dansk* hvis en regulær sekskant kan bli delt opp i n kongruente polygoner. Vis at det finnes uendelig mange positive heltall n slik at både n og $2^n + n$ er danske.

Oppgave 10. Bob og Cecilia bygger en mur. Bob har en mengde grønne kubiske byggeblokker, og Cecilia har en mengde blå byggeblokker, alle i samme størrelse. På bakken er en rad av m kvadrater tegnet som plass-holdere. Bob og Cecilia bytter på å plassere en blokk, enten på et slikt kvadrat, eller på en av de allerede plasserte blokkene, men slik at høyden aldri overstiger n. Bob plasserer den første blokken.

Bob vedder på at han kan lage en grønn rad, det vil si at alle de m blokkene i en bestemt høyde er grønne. Cecilia vedder på at hun kan hindre ham å oppnå dette. Bestem alle par (m,n) av positive tall der Bob kan sikre seg å vinne veddemålet.

Oppgave 11. La H være ortosenteret og I innsenteret i den spissvinklede trekanten ABC. Omsirkelen til BCI skjærer linjestykket AB i P forskjellig fra B. La K være den ortogonale projeksjonen av H på AI, og Q speilbildet av P om K. Vis at B, H og Q er kollineære.

Oppgave 12. Linjen ℓ tangerer sirkelen S_1 i punktet X og sirkelen S_2 i punktet Y. Vi trekker en linje m som er parallell med ℓ og skjærer S_1 i et punkt P og S_2 i et punkt Q. Vis at forholdet XP/YQ ikke er avhengig av valget av linjen m.

Oppgave 13. La ABC være en trekant med $\angle ABC = 60°$. La I være innsenteret og O omsenteret i ABC. La M være midtpunktet på den buen BC av omsirkelen til ABC som ikke inneholder A. Gitt at $MB = OI$, bestem $\angle BAC$.

Oppgave 14. La P være et indre punkt i den spisse vinkelen $\angle BAC$. Anta at $\angle ABP = \angle ACP = 90°$. Punktene D og E ligger henholdsvis på linjestykkene BA og CA slik at $BD = BP$ og $CP = CE$. Punktene F og G ligger henholdsvis på linjestykkene AC og AB slik at DF står normalt på AB og EG står normalt på AC. Vis at $PF = PG$.

Oppgave 15. La $n \geq 3$ være et heltall. Hva er det største mulige antall indre vinkler større enn 180° en n-kant i planet kan ha, gitt at n-kanten ikke er selvskjærende og alle dens sider er like lange?

Oppgave 16. Er det mulig for enhver gruppe av personer å velge et positivt heltall N og tilordne hver person i gruppen et positivt heltall slik at produktet av tallene tilordnet to personer er delelig med N hvis og bare hvis de to personene er venner?

Oppgave 17. Bestem om ligningen

$$x^4 + y^3 = z! + 7$$

har uendelig mange positive heltallige løsninger.

Oppgave 18. La $p > 3$ være et primtall og $a_1, a_2, \ldots, a_{\frac{p-1}{2}}$ en permutasjon av tallene $1, 2, \ldots, \frac{p-1}{2}$. For hvilke p er det alltid mulig å bestemme følgen $a_1, a_2, \ldots, a_{\frac{p-1}{2}}$ dersom vi for enhver $i, j \in \{1, 2, \ldots, \frac{p-1}{2}\}$ med $i \neq j$ vet hva restklassen til $a_i a_j$ er modulo p?

Oppgave 19. Gitt et heltall $n \geq 1$ la $a(n)$ betegne antall menter som oppstår når 2017 og $n \cdot 2017$ skal legges sammen. De første verdiene er da $a(1) = 1$, $a(2) = 1$, $a(3) = 0$, som kan ses slik:

001	001	000
2017	4034	6051
+2017	+2017	+2017
=4034	=6051	=8068

Vis at

$$a(1) + a(2) + \ldots + a(10^{2017} - 2) + a(10^{2017} - 1) = 10 \cdot \frac{10^{2017} - 1}{9}.$$

Oppgave 20. La S være mengden av ordnede par (a,b) av heltall med $0 < 2a < 2b < 2017$ slik at $a^2 + b^2$ er delelig med 2017. Vis at

$$\sum_{(a,b)\in S} a = \frac{1}{2} \sum_{(a,b)\in S} b .$$