Baltic Way 2017

Version: *Polish*

Sorø, 11 listopada, 2017

Czas pracy: 4.5 godziny.
Pytania można zadawać w ciągu początkowych 30 minut.
Dopuszczalne jest posiadanie jedynie przyborów do pisania i rysowania.

Problem 1. Niech $a_0, a_1, a_2, \ldots$ będzie nieskończonym ciągiem liczb rzeczywistych spełniających warunek $\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2} \geq a_n$ dla wszystkich dodatnich liczb całkowitych n. Udowodnić, że

$$\frac{a_0 + a_{n+1}}{2} \geq \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$

zachodzi dla każdej liczby całkowitej dodatniej n.

Problem 2. Czy istnieje skończony zbiór liczb rzeczywistych, których suma wynosi 2, suma ich kwadratów wynosi 3, suma ich sześcianów wynosi 4, ..., oraz suma ich dziewiątych potęg wynosi 10?

Problem 3. Dodatnie liczby całkowite $x_1, \ldots, x_m$ (niekoniecznie różne) zostały napisane na tablicy. Wiadomo, że każda z liczb $F_1, \ldots, F_{2018}$ może być przedstawiona jako suma jednej lub więcej z liczb napisanych na tablicy. Jaka jest najmniejsza możliwa wartość liczby m?

($F_1, \ldots, F_{2018}$ są pierwszymi 2018 liczbami Fibonacciego: $F_1 = F_2 = 1$, $F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$ dla $k > 1$.)

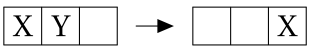
Problem 4. *Liniową formą k* zmiennych nazwiemy wyrażenie postaci $P(x_1, \ldots, x_k) = a_1 x_1 + \ldots + a_k x_k$ dla pewnych rzeczywistych stałych $a_1, \ldots, a_k$. Udowodnić, że istnieje dodatnia liczba całkowita n oraz liniowe formy $P_1, \ldots, P_n$ 2017 zmiennych, takie że dla każdych liczb rzeczywistych $x_1, \ldots, x_{2017}$ zachodzi równość

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{2017} = P_1(x_1, \ldots, x_{2017})^{2017} + \ldots + P_n(x_1, \ldots, x_{2017})^{2017}.$$

Problem 5. Znajdź wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, takie że dla wszystkich liczb rzeczywistych x, y zachodzi równość

$$f(x^2 y) = f(xy) + y f(f(x) + y).$$

Problem 6. Piętnaście kamyków rozmieszczono na planszy 4×4, każdy na innym polu. Pozostałe pole zostało puste. Jeżeli dwa kamyki stoją na sąsiednich polach (posiadających wspólny bok), jeden z nich może przeskoczyć nad drugim, lądując na przeciwległym polu, pod warunkiem, że jest ono wolne. Przeskoczony kamyk zostaje zdjęty z planszy.

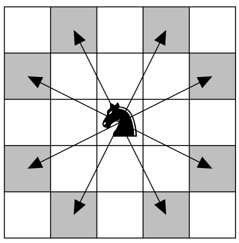


Dla których początkowych pozycji pustego pola jest możliwe uzyskanie stanu z jednym kamykiem na planszy?

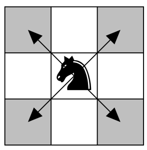
Problem 7. Każda krawędź pełnego grafu na 30 wierzchołkach została pokolorowana na czerwono lub niebiesko. Dozwolone jest wykonywanie operacji wyboru trójkata, który nie jest jednokolorowy i zmiany koloru jego dwóch krawędzi tego samego koloru w celu uzyskania jednokolorowego trójkąta. Udowodnić, że używając wielokrotnie tej operacji możemy doprowadzić do stanu, w którym wszystkie krawędzie będą tego samego koloru.

(Graf pełny to graf, w którym każde dwa wierzchołki są połączone krawędzią.)

Problem 8. Konik szachowy skręcił swoją nóżkę i kuleje. Naprzemiennie wykonuje zwykłe i krótkie ruchy, gdzie krótki ruch to przeskoczenie do pola sąsiadującego po skosie.



Zwykły ruch



Krótki ruch

Kulejący konik porusza się po planszy 5×6, rozpoczynając od zwykłego ruchu. Wyznaczyć największą możliwą liczbę ruchów, które można on wykonać, nie odwiedzając żadnego pola (włączając początkowe) więcej niż raz.

Problem 9. Nazwijmy liczbę całkowitą dodatnią n *duńską*, jeżeli sześciokąt foremny może być podzielony na n przystających wielokątów. Udowodnić, że istnieje nieskończenie wiele liczb całkowitych dodatnich n, takich że zarówno n oraz $2^n + n$ są duńskie.

Problem 10. Kreator i Psuj budują ścianę. Kreator ma zapas zielonych sześcianików, a Psuj zapas czerwonych. Wszystkie sześcianiki mają ten sam rozmiar. Na ziemi zaznaczono kredą w jednym rzędzie m kwadratów. Kreator i Psuj naprzemiennie umieszczają po jednym sześcianiku na jednym z zaznaczonych kwadratów lub na wierzchu wcześniej położonego sześcianika w taki sposób, aby wysokość tej kolumny nie przekraczała n. Kreator rozpoczyna budowanie.

Kreator twierdzi, że jest w stanie zbudować zielony rząd, to znaczy rząd m zielonych sześcianików na pewnej wysokości. Psuj twierdzi, że jest w stanie przeszkodzić mu w tym. Wyznaczyć wszystkie pary (m, n) liczb całkowitych dodatnich, dla których Kreator ma rację.

Problem 11. Niech H będzie ortocentrum trójkąta ostrokątnego ABC, a I środkiem okręgu wpisanego w ten trójkąt. Okrąg opisany na trójkącie BCI przecina odcinek AB ponownie w punkcie P różnym od B. Niech K będzie rzutem H na AI oraz niech Q będzie odbiciem P względem K. Udowodnić, że B, H oraz Q są współliniowe.

Problem 12. Prosta ℓ jest styczna do okręgu S_1 w punkcie X oraz do okręgu S_2 w punkcie Y. Prosta m równoległa do ℓ przecina S_1 w punkcie P i S_2 w punkcie Q. Udowodnić, że stosunek XP/YQ nie zależy od wyboru m.

Problem 13. Niech ABC będzie trójkątem, w którym $\angle ABC = 60°$. Niech I oraz O będą odpowiednio środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC oraz środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC. Niech M będzie środkiem łuku BC okręgu opisanego na ABC, który nie zawiera punktu A. Ponadto zachodzi $MB = OI$. Wyznaczyć miarę $\angle BAC$.

Problem 14. Niech P będzie punktem wewnątrz ostrego kąta $\angle BAC$. Załóżmy, że $\angle ABP = \angle ACP = 90°$. Punkty D i E leżą odpowiednio na odcinkach BA oraz CA i zachodzi $BD = BP$ oraz $CP = CE$. Punkty F i G leżą odpowiednio na odcinkach AC oraz AB. Ponadto DF jest prostopadłe do AB oraz EG jest prostopadłe do AC. Udowodnić, że $PF = PG$.

Problem 15. Niech $n \geq 3$ będzie liczbą całkowitą. Wyznaczyć największą możliwą liczbę wewnętrznych kątów większych niż $180°$ w n-kącie bez samoprzecięć o bokach równej długości.

Problem 16. Czy dla każdej grupy osób istnieje dodatnia liczba całkowita N i przyporządkowanie osobom liczb całkowitych dodatnich, w którym dla każdej pary spośród tych osób znają się one wtedy i tylko wtedy, gdy iloczyn liczb im przyporządkowanych jest podzielny przez N?

Problem 17. Rozstrzygnąć, czy równanie

$$x^4 + y^3 = z! + 7$$

ma nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach całkowitych dodatnich.

Problem 18. Niech $p > 3$ będzie liczbą pierwszą oraz niech $a_1, a_2, \ldots, a_{\frac{p-1}{2}}$ będzie permutacją liczb $1, 2, \ldots, \frac{p-1}{2}$. Dla których p ciąg $a_1, a_2, \ldots, a_{\frac{p-1}{2}}$ jest jednoznacznie wyznaczony, jeżeli dla wszystkich $i, j \in \{1, 2, \ldots, \frac{p-1}{2}\}$ spełniających $i \neq j$ jest znana wartość $a_i a_j$ modulo p?

Problem 19. Dla liczby całkowitej dodatniej n niech $a(n)$ oznacza sumaryczną liczbę przeniesień w dodawaniu pisemnym 2017 oraz $n \cdot 2017$. Początkowe wartości tego ciągu są zadane przez $a(1) = 1$, $a(2) = 1$, $a(3) = 0$, co może być zaobserwowane z następujących działań:

001	001	000
2017	4034	6051
+2017	+2017	+2017
=4034	=6051	=8068

Udowodnić, że

$$a(1) + a(2) + \ldots + a(10^{2017} - 2) + a(10^{2017} - 1) = 10 \cdot \frac{10^{2017} - 1}{9}.$$

Problem 20. Niech S będzie zbiorem wszystkich uporządkowanych par (a, b) liczb całkowitych, takich że $0 < 2a < 2b < 2017$ oraz $a^2 + b^2$ jest wielokrotnością 2017. Udowodnić, że

$$\sum_{(a,b)\in S} a = \frac{1}{2} \sum_{(a,b)\in S} b .$$