Baltic Way 2017

Version: *Russian*

Sorø, November 11th, 2017

Длительность олимпиады: 4,5 часа.
Вопросы по условиям: в течение первых 30 минут.
Разрешается использовать только письменные принадлежности.

1. Пусть $a_0, a_1, a_2, \ldots,$ — бесконечная последовательность вещественных чисел, удовлетворяющая неравенствам $\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2} \geqslant a_n$ при всех натуральных n. Докажите, что при всех натуральных n

$$\frac{a_0 + a_{n+1}}{2} \geqslant \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}.$$

2. Существует ли такое конечное множество вещественных чисел, что сумма этих чисел равна 2, сумма их квадратов равна 3, сумма их кубов равна 4, …, сумма девятых степеней равна 10?

3. На доске выписаны (не обязательно различные) натуральные числа $x_1, \ldots, x_m$. Известно, что каждое из чисел $F_1, \ldots, F_{2018}$ можно представить как сумму нескольких (одного или более) чисел, записанных на доске. Какое минимальное значение может принимать число m? (Здесь $F_1, \ldots, F_{2018}$ — первые 2018 чисел Фибоначчи: $F_1 = F_2 = 1$, $F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$ при $k > 1$.)

4. *Линейная форма* от k переменных — это выражение вида $P(x_1, \ldots, x_k) = a_1x_1 + \ldots + a_kx_k$ с вещественными коэффициентами $a_1, \ldots, a_k$. Докажите, что существует такое натуральное n и такие линейные формы $P_1, \ldots, P_n$ от 2017 переменных, что для любых вещественных $x_1, \ldots, x_{2017}$ выполняется равенство

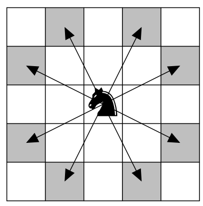
$$x_1x_2\ldots x_{2017} = P_1(x_1, \ldots, x_{2017})^{2017} + \ldots + P_n(x_1, \ldots, x_{2017})^{2017}.$$

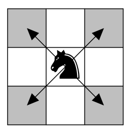
5. Найдите все функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, для которых $f(x^2y) = f(xy) + yf(f(x) + y)$ при всех $x, y \in \mathbb{R}$.

6. На 15 клетках доски 4×4 изначально лежит по шашке, а оставшаяся клетка пуста. Разрешается делать ходы следующего вида: шашка X может перепрыгнуть через соседнюю (по стороне) шашку Y, на следующую за ней клетку, если она пуста; при этом шашка Y снимается с доски: $\boxed{X}\boxed{Y}\boxed{} \to \boxed{}\boxed{}\boxed{X}$ При каком исходном положении пустой клетки можно при помощи таких ходов оставить на доске ровно одну шашку?

7. В полном графе с 30 вершинами каждое ребро покрашено в красный или синий цвет. Разрешается выбрать треугольник, не все ребра которого имеют одинаковый цвет, и сменить цвет двух его одноцветных ребер, сделав все три ребра одноцветными. Докажите, что такими операциями можно перекрасить все ребра графа в одинаковый цвет.

8. Шахматный конь повредил ногу и теперь хромает: он чередует обычные ходы и «короткие», при которых он перемещается на соседнюю по диагонали клетку. Хромой конь начинает движение по доске 5×6 с нормального хода (и сам выбирает начальную клетку). Какое наибольшее число ходов он может сделать, не посещая ни одну клетку, в том числе, и начальную, больше одного раза?


Нормальный ход


Короткий ход

9. Назовём натуральное число n *датским*, если правильный шестиугольник можно разрезать на n равных многоугольников. Докажите, что существует бесконечно много таких натуральных n, что числа n и $2^n + n$ оба являются датскими.

10. Творитель и Мешатель строят стену. Творитель имеет запас зеленых кубических кирпичей, а Мешатель — красных (все кирпичи одинакового размера). На полу мелом нарисована полоска из m квадратных клеток. Творитель и Мешатель по очереди кладут по одному кирпичу: положить кирпич можно либо на одну из нарисованных на полу клеток, либо на любой из уже положенных кирпичей, но так, чтобы высота получившейся колонны не превосходила n кирпичей. Начинает Творитель. Он хочет, чтобы появилась «зеленая полоса» из m зеленых кирпичей, расположенных на одной высоте. Мешатель пытается помешать этому. Для каких пар (m, n) Творитель сможет добиться успеха?

11. Точки H и I — соответственно ортоцентр и центр вписанной окружности остроугольного треугольника ABC. Описанная окружность треугольника BCI пересекает отрезок AB в точке P (отличной от B). Точка K — проекция точки H на AI, точка Q симметрична точке P относительно точки K. Докажите, что точки B, H и Q лежат на одной прямой.

12. Прямая ℓ касается окружности S_1 в точке X и окружности S_2 в точке Y. Проводится прямая m, параллельная ℓ и пересекающая S_1 в точке P и S_2 в точке Q. Докажите, что отношение XP/YQ не зависит от выбора прямой m.

13. В треугольнике ABC угол ABC равен 60°. Точки I и O — центры его вписанной и описанной окружностей соответственно. Точка M — середина дуги BC описанной окружности (не содержащей точки A). Известно, что $MB = OI$. Найдите угол BAC.

14. Внутри острого угла BAC выбрана точка P так, что $\angle ABP = \angle ACP = 90^\circ$. На отрезках BA и CA выбраны точки D и E соответственно так, что $BD = BP$ и $CP = CE$. На отрезках AC и AB выбраны точки F и G соответственно так, что $DF \perp AB$ и $EG \perp AC$. Докажите, что $PF = PG$.

15. Дано натуральное число $n \geqslant 3$. Какое наибольшее число внутренних углов, больших чем 180°, может быть у (несамопересекающегося) n-угольника на плоскости, все стороны которого равны?

16. Верно ли, что для любой компании людей можно подобрать натуральное число N и выдать каждому члену компании по натуральному числу так, чтобы для любых двух членов компании произведение их чисел делилось на N в том и только в том случае, когда они дружат друг с другом?

17. Имеет ли уравнение

$$x^4 + y^3 = z! + 7$$

бесконечное количество решений в натуральных числах?

18. Пусть $p > 3$ — простое число, и $a_1, a_2, \ldots, a_{\frac{p-1}{2}}$ — некоторая перестановка чисел $1, 2, \ldots, \frac{p-1}{2}$. При каких p эту перестановку всегда можно восстановить, если для каждой пары индексов i, j, где $i, j \in \{1, 2, \ldots, \frac{p-1}{2}\}$, $i \neq j$, известен остаток от деления числа $a_i a_j$ на p?

19. Для каждого натурального n обозначим через $a(n)$ число переносов, возникающих при сложении в столбик чисел 2017 и $2017n$. Первые несколько значений таковы: $a(1) = 1$, $a(2) = 1$, $a(3) = 0$, что видно из сложений в столбик

0 0 1	0 0 1	0 0 0
2017	4034	6051
+2017	+2017	+2017
=4034	=6051	=8068

Докажите, что $a(1) + a(2) + \ldots + a(10^{2017} - 2) + a(10^{2017} - 1) = 10 \cdot \frac{10^{2017}-1}{9}$.

20. Пусть S – множество всех упорядоченных пар (a, b) натуральных чисел, удовлетворяющих условиям $0 < 2a < 2b < 2017$ и $a^2 + b^2$ кратно 2017. Докажите, что

$$\sum_{(a,b)\in S} a = \frac{1}{2} \sum_{(a,b)\in S} b.$$