Baltic Way 2017

Version: *Swedish*

Sorø, 11 november 2017

Skrivtid: 4.5 timmar.
Frågor kan ställas under tävlingens första 30 minuter. Endast rit- och skrivdon tillåtna.

Problem 1. Låt $a_0, a_1, a_2, \ldots$ vara en oändlig reell talföljd med egenskapen att $\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2} \geq a_n$ för alla positiva heltal n. Visa att

$$\frac{a_0 + a_{n+1}}{2} \geq \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$

gäller för alla positiva heltal n.

Problem 2. Existerar det en ändlig mängd av reella tal av sådan beskaffenhet, att summan av talen är 2, summan av deras kvadrater 3, summan av deras kuber 4, ..., och summan av deras niondepotenser 10?

Problem 3. En samling positiva heltal $x_1, \ldots, x_m$ (ej nödvändigtvis olika) står skrivna på en svart tavla. Det är känt, att vart och ett av Fibonacci-talen $F_1, \ldots, F_{2018}$ kan erhållas som en summa av ett eller flera tal på tavlan. Vilket är minsta möjliga värde på m?

(Fibonacci-talen definieras av $F_1 = F_2 = 1$ och $F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$ för $k > 1$.)

Problem 4. En *linjär form* i k variabler är ett algebraiskt uttryck på formen $P(x_1, \ldots, x_k) = a_1 x_1 + \cdots + a_k x_k$ med reella koefficienter $a_1, \ldots, a_k$.

Bevisa, att det existerar ett positivt heltal n och linjära former $P_1, \ldots, P_n$ i 2017 variabler, sådana att

$$x_1 x_2 \cdots x_{2017} = P_1(x_1, \ldots, x_{2017})^{2017} + \cdots + P_n(x_1, \ldots, x_{2017})^{2017}$$

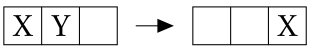
gäller för alla reella tal $x_1, \ldots, x_{2017}$.

Problem 5. Sök samtliga funktioner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, som uppfyller

$$f(x^2 y) = f(xy) + y f(f(x) + y)$$

för alla reella tal x och y.

Problem 6. Femton stenar arrangeras på ett 4×4-rutnät, en i varje ruta, medan en ruta lämnas tom. Närhelst två stenar befinner sig på angränsande rutor (med gemensam kant), får den ena hoppa över den andra till den angränsande rutan på andra sidan, förutsatt denna är tom. Den överhoppade stenen avlägsnas från brädet:

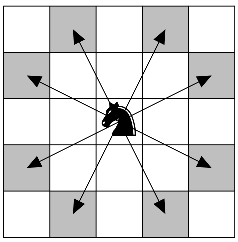


Var kan den ursprungliga tomma rutan befinna sig, om slutligen en enda sten skall kunna kvarstå?

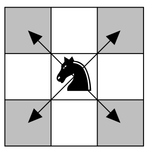
Problem 7. Varje båge i en fullständig graf på 30 noder har färgats antingen röd eller blå. Det är tillåtet, att välja en tvåfärgad triangel och byta färg på de två bågarna med samma färg, så att triangeln blir enfärgad. Bevisa, att upprepad användning av denna operation räcker för att färga hela grafen i en och samma färg.

(I en fullständig graf är varje par av noder (hörn) förbundna med en båge (kant).)

Problem 8. Schackhästen (springaren) har blivit lytt och halt till följd av en knäskada. Varannat drag är därför ett traditionellt drag, och varannat ett kort drag, där förflyttningen sker till en diagonalt angränsande ruta.



Traditionellt drag



Kort drag

Den halta hästen rör sig på ett schackbräde av storlek 5×6, och inleder med ett traditionellt drag. Hur många drag kan den som mest göra, från valfri startruta, såframt ingen ruta (även den första) må besökas mer än en gång?

Problem 9. Ett positivt heltal n är *danskt*, om en regelbunden hexagon låter sig uppdelas i n kongruenta polygoner. Bevisa, att både n och $2^n + n$ är danska för oändligt många val av positiva heltal n.

Problem 10. Uno och Fia bygger en mur. Uno har ett förråd av gröna kubiska byggstenar och Fia ett förråd av röda stenar, samtliga av identisk storlek. På marken har en rad av m kvadrater uppritats i krita för att markera murens plats. Uno och Fia turas nu om att utplacera en sten var, antingen direkt på en av dessa kvadrater, eller också ovanpå en redan utlagd sten. Höjden av varje kolumn må därvidlag aldrig överstiga n. Uno lägger första stenen.

Uno slår vad om, att han skall kunna åstadkomma en grön rad av m stenar på samma höjd. Fia strävar efter att förhindra detta. Bestäm alla par (m,n) av positiva heltal, för vilka Uno kan försäkra sig om att vinna vadet.

Problem 11. Låt H och I beteckna höjdernas skärningspunkt respektive inskrivna cirkelns medelpunkt i den spetsvinkliga triangeln ABC. Omskrivna cirkeln till triangeln BCI skär sträckan AB i punkten P, skild från B. Låt K vara projektionen av H på AI, och låt Q vara spegelbilden av P i K. Visa, att B, H och Q ligger på rät linje.

Problem 12. Linjen l tangerar cirkeln S_1 i punkten X och cirkeln S_2 i punkten Y. Vi drar linjen m, parallell med l, som skär S_1 i en punkt P och S_2 i en punkt Q. Bevisa, att förhållandet XP/YQ är oberoende av valet av m.

Problem 13. Betrakta en triangel ABC, i vilken $\angle ABC = 60°$. Låt I och O beteckna inskrivna respektive omskrivna cirkelns centrum. Låt M vara mittpunkten på den båge BC av den omskrivna cirkeln till ABC, som ej innehåller punkten A. Bestäm $\angle BAC$, givet att $MB = OI$.

Problem 14. Betrakta en punkt P inuti en spetsig vinkel $\angle BAC$. Antag att $\angle ABP = \angle ACP = 90°$. Punkterna D och E, på sträckorna BA respektive CA, är sådana att $BD = BP$ och $CP = CE$. Punkterna F and G, på sträckorna AC respektive AB, är sådana att DF är vinkelrät mot AB, och EG är vinkelrät mot AC. Visa att $PF = PG$.

Problem 15. Låt $n \geq 3$ vara ett heltal. Betrakta en liksidig n-hörning i planet, som icke skär sig själv. Vilket är det maximala antalet inre vinklar, som kan vara reflexvinklar (större än 180°)?

Problem 16. Är det möjligt, för en godtycklig samling personer, att välja ett positivt heltal N och tilldela varje person ett positivt heltal av sådan beskaffenhet, att produkten av två personers tal är delbar med N om och endast om de är vänner med varandra?

Problem 17. Avgör, huruvida ekvationen

$$x^4 + y^3 = z! + 7$$

har ett oändligt antal positiva heltalslösningar.

Problem 18. Låt $p > 3$ vara ett primtal och $a_1, a_2, \ldots, a_{\frac{p-1}{2}}$ en permutation av $1, 2, \ldots, \frac{p-1}{2}$. För vilka p är det alltid möjligt, att deducera sekvensen $a_1, \ldots, a_{\frac{p-1}{2}}$ utifrån vetskap om resterna av $a_i a_j$ modulo p för alla $i, j = 1, 2, \ldots, \frac{p-1}{2}$ med $i \neq j$?

Problem 19. För varje heltal $n \geq 1$, låt $a(n)$ beteckna antalet minnessiffror, som krävs vid addition av 2017 till $n \cdot 2017$. De första värdena ges av $a(1) = 1$, $a(2) = 1$, $a(3) = 0$, vilket avläses från följande uppställningar:

001	001	000
2017	4034	6051
+2017	+2017	+2017
=4034	=6051	=8068

Bevisa att

$$a(1) + a(2) + \cdots + a(10^{2017} - 2) + a(10^{2017} - 1) = 10 \cdot \frac{10^{2017} - 1}{9}.$$

Problem 20. Låt S vara mängden av ordnade heltalspar (a,b) satisfierande $0 < 2a < 2b < 2017$, och sådana att $a^2 + b^2$ är en multipel av 2017. Bevisa att

$$\sum_{(a,b)\in S} a = \frac{1}{2} \sum_{(a,b)\in S} b.$$